Důsledek 90: Nechť $u_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivace na celém omezeném intervalu (a,b). Nechť

(i) $\exists x_0 \in (a,b)$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ K.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \rightrightarrows$ na (a,b).

Pak $\sum u_n \rightrightarrows$ a

$$\left(\sum u_n\right)' = \sum u_n' \quad \text{na } (a,b).$$

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ ... trigon. řada

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right)' \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

na libovolném intervalu (a,b), že $0 \in (a,b)$ $(x_0 = 0)$.

(i) $\sum u_n(x_0) = \sum \frac{\sin(n\cdot 0)}{n^3} = \sum 0 = 0$ ✓

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \overset{?}{\rightrightarrows}$ na (a,b)

W.KR: $|\tilde{u}_n| \leq a_n$ na $M = (a,b)$

$\sum a_n$ K $\Rightarrow \sum u_n \rightrightarrows$.

$$a_n = \sup_{x \in M} |\tilde{u}_n(x)| = \sup_{x \in (a,b)} \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \overset{\text{SR.KR.}}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ K} \overset{\text{WKR}}{\Longrightarrow} \sum \tilde{u}_n \rightrightarrows.$$

Tedy i (ii) z D90 platí a ona rovnost nastává.

MOCNINNÉ ŘADY

Definice 91: Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, kde $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) nazýváme reálnou (resp. komplexní) mocninnou řadou se středem x_0.

Příklad: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je mocninná ř. se středem v 0.

(Srovnej $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$)

Věta 92: Ke každé řadě $\sum a_n (x-x_0)^n$ existuje jednoznačně určené $R \in [0,\infty]$ takové, že platí:

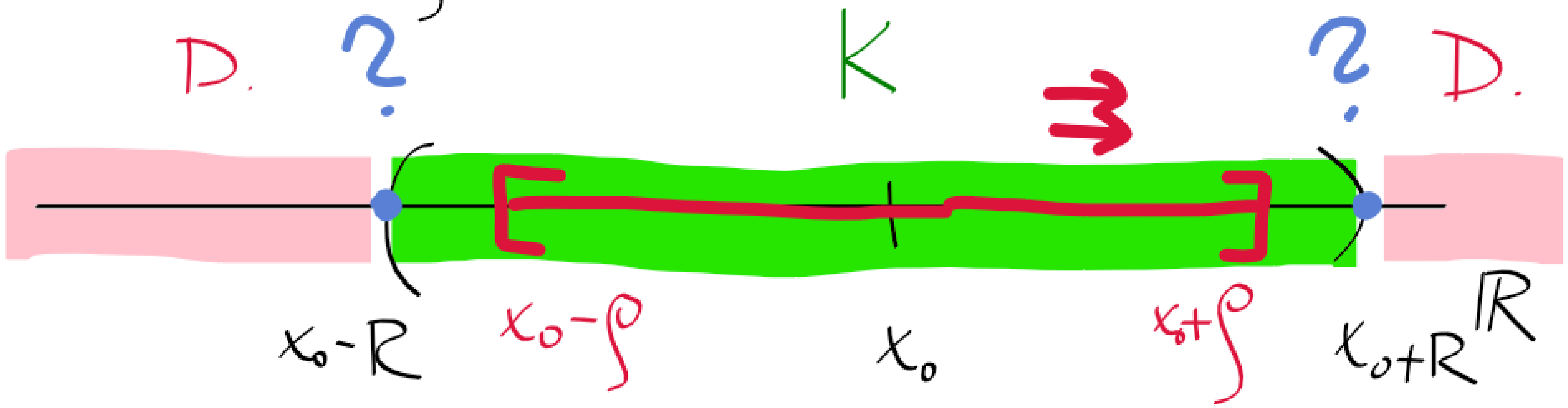
(i) Je-li $|x-x_0| > R$, pak $\sum a_n (x-x_0)^n$ D.

(ii) Je-li $|x-x_0| < R$, pak $\sum a_n (x-x_0)^n$ K.

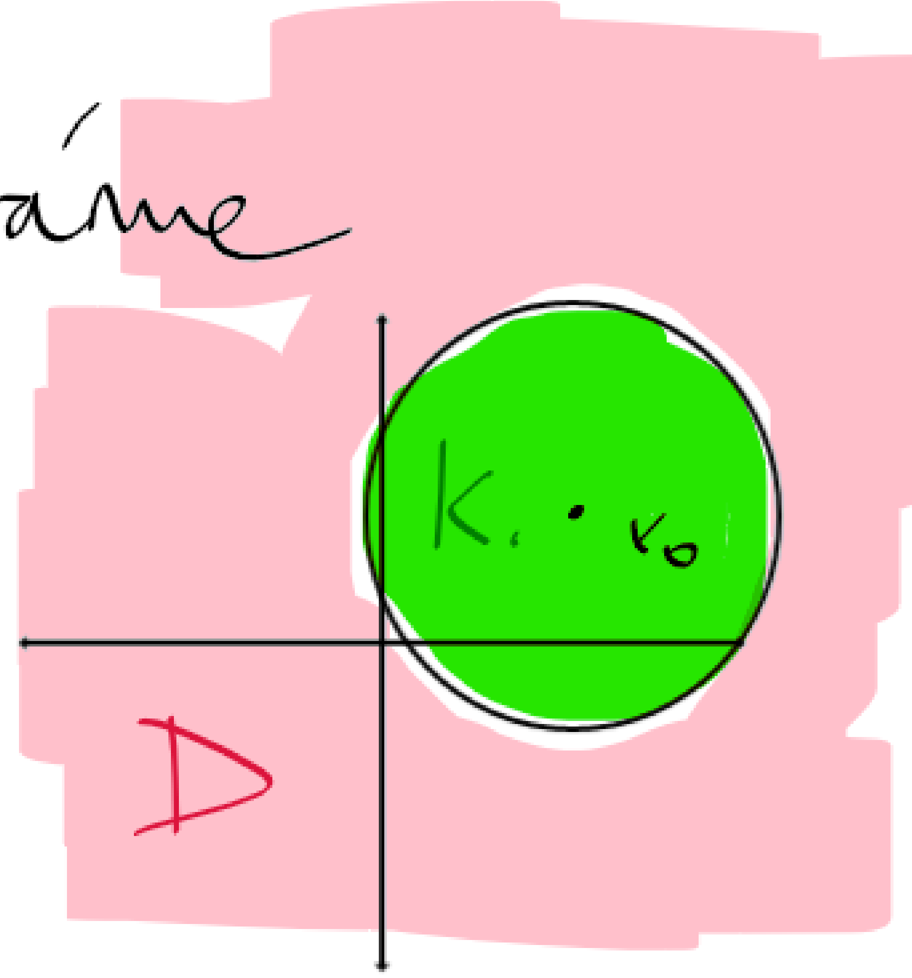
navíc platí, že řada

$\sum a_n (x-x_0)^n \rightrightarrows$ na $[x_0-\rho, x_0+\rho]$,

kde $0 \le \rho < R$.



Toto číslo R nazýváme poloměr konvergence.



Pozn.:

Věta 93: (Určování pol. konvergence)

Buď $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mocninná řada.

Pak:

(i) Pokud $\forall n: a_n \neq 0$ a existuje násl. limita, platí $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

(ii) $$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}};$$

(iii) Pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$,

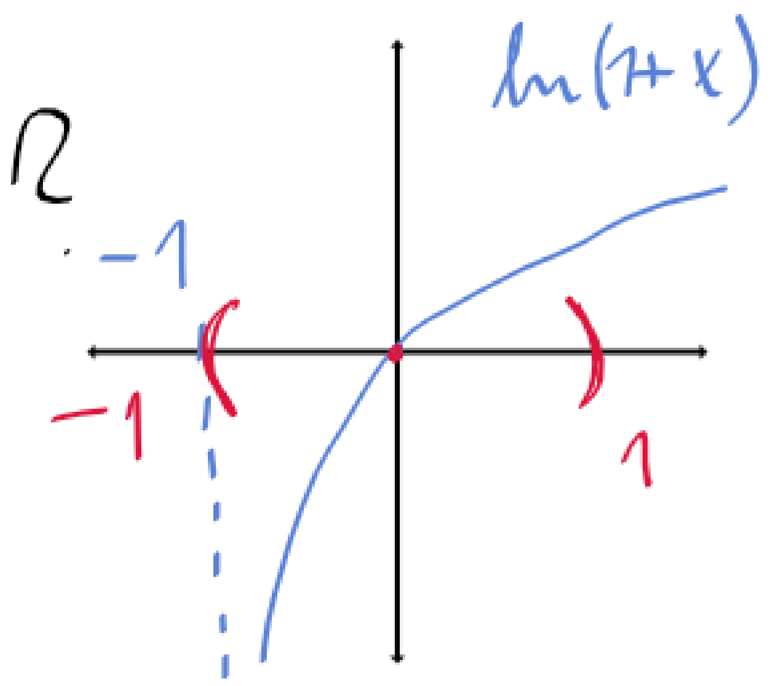
pak $$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dk: Snadný důsledek Cauchyova odmocn. kr

Příklad: • $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}}_{a_n} \cdot x^n \qquad (\text{střed } x_0 = 0).$$

Poloměr konvergence ... $R = ?$



Podle (iii) z V93:

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}.$$

$\Longrightarrow$ naše řada konverguje pro $x \in (-1,1)$

diverguje pro $x > 1 \vee x < -1$.

$x = -1$ $\quad -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots = -\infty$

$$\left(= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty \right)$$

$x = 1$ $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$ K. podle Leibnizova kr.

$$\sum (-1)^n \cdot \mu_n, \quad \mu_n \downarrow 0. \quad [\text{K.}]$$

OTÁZKA JE:

Víme: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n, \quad x \in (-1,1)$.

Platí to i pro $x = 1$?

Věta 94: (Abelova věta)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je reálná moc. ř. s poloměrem K. $0 < R < \infty$.

[Pak (V98) K na $(-R,R)$] Pak

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ K. $\iff$ $\sum a_n x^n \rightrightarrows$ na $(0,R)$

(ii) ... $(-R)^n$ ... $\iff$ ... na $(-R,0)$

Pokud to nastává, je $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je spojitá na $(-R,R]$ (pro (i)), resp. na $[-R,R)$ (pro (ii)).

Tedy $\ln(1+1) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Příklad: (arctg a $\frac{\pi}{4} = \dots$)

$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

f' rozvineme do mocninné řady:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \overset{[\text{geom. ř.}]}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad / \int$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Zintegrovat člen po členu?

$$f(x) + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

↳ konverguje pro $x_0 = 0$

[$C = ?$] Do rovnosti dosaď $x = 0$

$$f(0) + C = \sum (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1}, \text{ tj.}$$

$$\operatorname{arctg} 0 + C = 0 \implies C = 0$$

Tedy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Na jakém intervalu jde o korektní úvahu?

Fakt: Derivování / integrování mocninné řady člen po členu nemá vliv na poloměr konvergence.

Rovnost $=$ platí pro $-x^2 \in (-1,1)$, tj. pro $x \in (-1,1)$.

Tedy $R = 1$ pro obě řady.

Ale konvergence řady je $\rightrightarrows$ na $[-\rho, \rho]$, $0 < \rho < R$. Podle D90 tedy $=$ platí na $[-\rho,\rho] \subseteq (-1,1)$, tedy i na $(-1,1)$.

$$\left((-1,1) = \bigcup_{0<\rho<1} [-\rho,\rho] \right).$$

<u>Celkem:</u> $\forall x \in (-1,1)$:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} =: f(x)$$

<u>OTÁZKA:</u> Platí tento vzorec i pro $x=1$ (resp. $x=-1$) ?

Podle Abelovy věty stačí ověřit konvergenci řady v bodě $x=1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \searrow 0$$

Tato ř. K. podle Leibnize.

<u>Abel</u> $\Longrightarrow$ f je spojitá na $(0,1]$.

Ale arctg — || —

navíc: $\operatorname{arctg} = f$ na $(-1,1)$.

Tedy $f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} x$

$= \operatorname{arctg} 1$.

<u>Celkem:</u>

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Př 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{a_n} \cdot (x-666)^n$

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{, ex.-li ta lim.}$$

• $\lim \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

$R = \frac{1}{e}$. (Tedy řada k. pro $x \in \left(666-\frac{1}{e}, 666+\frac{1}{e}\right)$)

Př 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n \qquad R = ?$

(Použij vzorec (i).)

Příklad: Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} =: f(x). \quad \text{Tj. } f = ?$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot (2n-1)\, x^{2n-2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2\overbrace{(n-1)}^{k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{1}{1-x^2}$$

Tj. $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ na $(-R, R)$. $(R=1)$

$f(x) \overset{C}{=} \int \frac{dx}{1-x^2} =$ parc. zlomky ...

dopočti C dosaz...

Příklad: $f(x) = e^{-x^2}$ ... rozviňte do řady

Platí $\forall y \in \mathbb{R} : e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, takže

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} (-1)^n$$

Pokud $F \stackrel{c}{=} \int f$

$$F(x) + C = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{-2} \cdot \left(\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \right)$$

$$-2x^2 + x + 1 = -2(x-\alpha)(x-\beta)$$

---

např. $\frac{5}{x-7}$ = rozvinout:

$$= -5 \cdot \frac{1}{7-x} = -\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x}{7}\right)} =$$

$$= -\frac{5}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{7}\right)^n = -\frac{5}{7} \sum_{n=0}^{\infty} 7^{-n} \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-5}{7^{n+1}} \cdot x^n.$$